

3. Espais vectorials amb producte escalar

3.1 Sigui E un espai vectorial euclidià.

- (a) Demostreu que $|u \cdot v| = \|u\| \|v\|$ si i només si els vectors u i v són linealment dependents.
- (b) Suposem ara que $v \neq 0$. Demostreu que $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$ si i només si $u = \lambda v$ amb $\lambda \geq 0$.

3.2 Siguin u, v dos vectors en un espai vectorial euclidià tals que $\|u\| = \|v\|$. Demostreu que els vectors $u + v$ i $u - v$ són ortogonals.

3.3 Sigui E un espai vectorial euclidià i siguin $u, v \in E$. Demostreu les afirmacions següents si són certes o trobeu un contraexemple si són falses:

- (a) Si u és ortogonal a v , aleshores $\|u + xv\| \geq \|u\|$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Si $\|u + xv\| \geq \|u\|$ per a tot $x \in \mathbb{R}$ aleshores u és ortogonal a v .

3.4 Sigui E un espai vectorial euclidià i sigui $e_1, \dots, e_n$ una base de E . Sigui F el subespai de E donat per l'equació $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$.

- (a) Demostreu que si la base $e_1, \dots, e_n$ és ortonormal llavors el vector que té per components $(a_1, \dots, a_n)$ és ortogonal al subespai F .
- (b) Demostreu que en el cas general, si G és la matriu de Gram en la base $e_1, \dots, e_n$, el producte de la matriu $\text{adj}(G)$ dels adjunts de G amb la matriu columna dels a_i és un vector ortogonal a F .

3.5 Es consideren els subespais següents de $\mathbb{R}^4$ amb el producte escalar ordinari:

$$F = \langle (2, 5, -1, 1), (3, 7, 0, 2) \rangle, \quad G = \langle (2, -1, 1, 0), (1, -3, 0, -1) \rangle.$$

- (a) Determineu els subespais $F^\perp$ i $G^\perp$.
- (b) Calculeu els subespais $F \cap G$, $(F \cap G)^\perp$, $F + G$ i $(F + G)^\perp$.

3.6 Siguin $F_1, \dots, F_k$ subespais d'un espai vectorial euclidià E tals que l'únic vector $v \in E$ que és ortogonal a tots ells és $v = 0$. Demostreu que si F és un subespai de E tal que $F_i \subseteq F$ per a tot i llavors $F = E$.

3.7 Calculeu la projecció ortogonal del vector $v = (-1, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ amb el producte escalar ordinari sobre cadascun dels subespais següents:

- (a) $F_1 = \langle (5, -1, 1) \rangle$.
- (b) $F_2 = \langle (1, 1, -2), (-1, 3, 1) \rangle$.
- (c) $F_3 = \langle (1, 2, 1), (-3, 2, -3) \rangle$.
- (d) $F_4 = \langle (0, 2, -1), (1, 4, -1), (3, 2, 2) \rangle$.
- (e) $F_5 = \langle (1, -1, 1), (0, 1, 1), (3, -3, 2) \rangle$.

3.8 Sigui E un espai vectorial euclidià orientat de dimensió 3 i sigui $u \in E$ un vector no nul. Demostreu que l'aplicació $f: E \rightarrow E$ donada per $f(x) = u \wedge x$ és lineal. Calculeu el nucli i la imatge de f en termes de u .

3.9 Donat un espai vectorial euclidià orientat de dimensió 3, demostreu les relacions següents:

- (a) $\det(u, u \wedge v, u \wedge w) = (u \cdot u) \det(u, v, w)$ per a $u, v, w \in E$ arbitraris.
- (b) $\det(u \wedge w_1, u \wedge w_2, u \wedge w_3) = 0$ per a $u, w_1, w_2, w_3 \in E$ arbitraris.

3.10 Sigui E un espai vectorial euclidià orientat de dimensió 3 i siguin $u, v \in E$ linealment independents.

- (a) Demostreu que l'aplicació $f: E \rightarrow E \times E$ donada per $f(x) = (u \wedge x, v \wedge x)$ és lineal i injectiva.
- (b) Demostreu que la imatge de f està continguda en el subespai $F \subset E \times E$ donat per

$$F = \{(u', v') \in E \times E \mid u' \cdot u = 0, v' \cdot v = 0, u' \cdot v + v' \cdot u = 0\}.$$

- (c) Deduïu dels apartats anteriors que $\text{Im}(f) = F$.

3.11 Sigui E un espai vectorial euclidià orientat de dimensió 3. Sigui e_1, e_2, e_3 una base de E i definim

$$u_1 = (e_2 \wedge e_3) \wedge e_1, \quad u_2 = (e_3 \wedge e_1) \wedge e_2, \quad u_3 = (e_1 \wedge e_2) \wedge e_3.$$

- (a) Demostreu que $\dim\langle u_1, u_2, u_3 \rangle \leq 2$. (Indicació: useu la identitat de Jacobi.)
- (b) Demostreu que $\dim\langle u_1, u_2, u_3 \rangle = 1$ si i només si exactament un dels vectors u_i és el vector zero. (Indicació: useu la fórmula $(u \wedge v) \wedge w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$.)
- (c) Demostreu que si $\dim\langle u_1, u_2, u_3 \rangle = 2$ aleshores

$$(e_3 \cdot e_1)(e_3 \cdot e_2)(e_1 \wedge e_2) + (e_1 \cdot e_2)(e_1 \cdot e_3)(e_2 \wedge e_3) + (e_2 \cdot e_1)(e_2 \cdot e_3)(e_3 \wedge e_1)$$

és una base de $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle^\perp$.

3.12 Siguin u_1, u_2, u_3 tres vectors d'un espai vectorial euclidià orientat de dimensió 3. Definim els vectors

$$v_1 = u_2 \wedge u_3, \quad v_2 = u_3 \wedge u_1, \quad v_3 = u_1 \wedge u_2.$$

- (a) Demostreu que $\det(v_1, v_2, v_3) = \det(u_1, u_2, u_3)^2$.
- (b) Demostreu que
 - (i) $\dim\langle u_1, u_2, u_3 \rangle \leq 1 \Leftrightarrow \dim\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = 0$;
 - (ii) $\dim\langle u_1, u_2, u_3 \rangle = 2 \Leftrightarrow \dim\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = 1$;
 - (iii) $\dim\langle u_1, u_2, u_3 \rangle = 3 \Leftrightarrow \dim\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = 3$.

3.13 Sigui E un espai vectorial euclidià orientat de dimensió 3 i siguin e_1, e_2 dos vectors unitaris linealment independents tals que $e_1 \cdot e_2 = 1/2$. Considerem l'aplicació $f: E \rightarrow E$ definida per

$$f(v) = v \wedge (e_1 \wedge e_2) + (v \cdot (e_1 \wedge e_2)) e_1 \wedge e_2.$$

- (a) Demostreu que f és lineal.
- (b) Demostreu que $\det(f) = \|e_1 \wedge e_2\|^4$.

3.14 Sigui E un espai vectorial euclidià orientat de dimensió 3 i siguin u, v i w tres vectors unitaris de E . Suposem que u i v són linealment independents.

- (a) Demostreu que el subespai $\langle u \wedge v, v \wedge w \rangle$ té dimensió 1 si i només si w pertany al subespai $\langle u, v \rangle$.
- (b) Demostreu que, si w és ortogonal a u i a v , llavors $\langle u \wedge w, v \wedge w \rangle = \langle u, v \rangle$.

3.15 Sigui E un espai vectorial euclidià orientat de dimensió 3. Sigui e_1, e_2, e_3 una base de E orientada positivament i sigui G la seva matriu de Gram. Sigui u_1, u_2, u_3 una base ortonormal positiva de E .

- (a) Demostreu que $\det_{u_1, u_2, u_3}(e_1, e_2, e_3) = \sqrt{\det(G)}$.
- (b) Deduïu que per a $u, v, w \in E$ arbitraris es compleix $(u \wedge v) \cdot w = \sqrt{\det(G)} \det_{e_1, e_2, e_3}(u, v, w)$.
- (c) Demostreu que la matriu de canvi de base de $e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1, e_1 \wedge e_2$ a e_1, e_2, e_3 és $\sqrt{\det(G)} G^{-1}$.

3.16 Siguin u i v dos vectors unitaris i ortogonals d'un espai vectorial euclidià orientat E de dimensió 3. Considerem l'aplicació $\varphi: E \rightarrow E$ donada per

$$\varphi(x) = (x \cdot u) v + (x \cdot v) u + \det(u, v, x) u \wedge v.$$

- (a) Demostreu que φ és lineal.
 - (b) Demostreu que el subespai $\langle u+v, u \wedge v \rangle$ està format per vectors propis de valor propi 1 i que el subespai $\langle u-v \rangle$ està format per vectors propis de valor propi -1 .
 - (c) Trobeu la matriu de φ en la base $u, v, u \wedge v$ i demostreu que és una matriu ortogonal.
- 3.17 Sigui f un endomorfisme d'un espai vectorial euclidià de dimensió 3 que satisfà $f(u) \wedge f(v) = u \wedge v$ per a qualsevol parell de vectors u, v . Fixem una base ortonormal positiva e_1, e_2, e_3 .
- (a) Demostreu que $f(e_i) \cdot e_j = 0$ si $i \neq j$.
 - (b) Demostreu que $\det_{e_i}(f(e_1), f(e_2), e_3) = \det_{e_i}(f(e_2), f(e_3), e_1) = \det_{e_i}(f(e_3), f(e_1), e_2) = 1$.
 - (c) Dedueix dels apartats anteriors que $f(e_i) = \lambda_i e_i$ amb $\lambda_i \lambda_j = 1$ si $i \neq j$. Demostreu com a conseqüència que $f = \pm \text{Id}$.