

5. Espais afins euclidians

5.1 Considerem en un pla afí euclidià una referència $\{O; e_1, e_2\}$ on $\widehat{e_1 e_2} = 60^\circ$ i els vectors e_1, e_2 són unitaris. Considerem també la recta $r : 2x + y - 1 = 0$ i el punt $p = (1, 1)$.

- (a) Trobeu la recta que passa per p i és perpendicular a r .
- (b) Calculeu la distància $d(p, r)$.

5.2 Sigui $\mathbb{A}$ un espai afí euclidià de dimensió 3. Calculeu les coordenades de la projecció ortogonal del punt $(1, -2, 3)$ sobre el pla $x - y + 2z = 0$ suposant que tenim en $\mathbb{A}$ una referència

- (a) ortonormal;
- (b) de vectors unitaris que formen entre ells angles de 60° .

Trobeu en tots dos casos la distància del punt al pla.

5.3 Sigui $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ una referència d'un espai afí euclidià de dimensió 3, de la qual se sap que tots tres vectors són unitaris, e_1 i e_2 són ortogonals i la recta que passa per O i $(1, 0, -2)$ és ortogonal al pla $\pi : 2y + 3z + d = 0$. Determineu l'angle que formen els altres vectors de la base i el valor de d perquè la distància del punt $(1, 1, 1)$ al pla π sigui $\frac{1}{2}$.

5.4 Considerem en un espai afí euclidià de dimensió 3 una referència $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ on $\widehat{e_1 e_2} = \widehat{e_1 e_3} = \widehat{e_2 e_3} = 60^\circ$ i els vectors e_1, e_2, e_3 són unitaris. Considerem també les rectes

$$r : x = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3}, \quad s : \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$$

Trobeu el cosinus de l'angle que formen les rectes r i s .

5.5 En un espai afí euclidià de dimensió 3 tenim dues rectes que, en una referència ortonormal, tenen les equacions

$$r : \begin{cases} x+z=0 \\ y=-2 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x=1 \\ y-z+3=0 \end{cases}$$

- (a) Busqueu les equacions de la perpendicular comuna i les seves interseccions amb r i s .
- (b) Busqueu les rectes paral·leles a la perpendicular comuna que tallen r i disten $\sqrt{\frac{3}{2}}$ de s . Busqueu també els seus punts de tall amb r .

5.6 Considerem les rectes r_1, r_2 i el pla L següents a $\mathbb{R}^3$:

$$r_1 : \begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ 3x - 2y - 2z = 3, \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ x - 3y + 2z = 3, \end{cases} \quad L : 3x + y + 19z = 2.$$

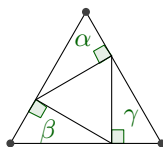
- (a) Trobeu els subespais directors de r_1, r_2 i L .
- (b) Suposant que les equacions anteriors estiguin expressades en un sistema de referència ortonormal,
 - (i) calculeu les distàncies $d(r_1, r_2)$ i $d(r_1, L)$;
 - (ii) trobeu l'angle que forma la perpendicular comuna a r_1 i r_2 amb el pla L .

- 5.7 Donat un sistema de coordenades ortonormal en un espai euclidià de dimensió 3, considerem el tetràedre de vèrtexs $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (1, 2, 0)$ i $D = (1, 1, 1)$. Determineu el pla que conté la perpendicular comuna a AC i BD i passa pel simètric de A respecte del pla BCD .
- 5.8 Donat un sistema de coordenades ortonormal en un espai euclidià de dimensió 3, considerem la recta $r : \{x + y = 0, z = 1\}$, el pla $\pi : \{z = 0\}$ i el punt $p = (1, 1, 0)$ d'aquest pla. Trobeu les distàncies $d(r, s)$ entre la recta r i les rectes s del pla π que passen pel punt p .
- 5.9 (a) Demostreu que les medianes d'un triangle es tallen en un punt (*baricentre*).
 (b) Demostreu que les altures d'un triangle es tallen en un punt (*ortocentre*).
 (c) Demostreu que les mediatrïus d'un triangle es tallen en un punt (*circumcentre*).
 (d) Si A, B, C són els vèrtexs d'un triangle, direm que les rectes

$$A + \left\langle \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|} \right\rangle, \quad B + \left\langle \frac{\overrightarrow{BA}}{\|\overrightarrow{BA}\|} + \frac{\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|} \right\rangle, \quad C + \left\langle \frac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|} + \frac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|} \right\rangle$$

són les *bisectrius interiors* del triangle. Demostreu que les tres bisectrius interiors d'un triangle es tallen en un punt (*incentre*).

- 5.10 (a) Siguin $P = (p_1, p_2)$ i $Q = (q_1, q_2)$ dos punts del pla afí euclidià estàndard $\mathbb{R}^2$ expressats en un sistema de referència ortonormal. Trobeu les coordenades dels dos punts R i S per als quals els triangles PQR i PQS són equilàters.
- (b) Donat un triangle ABC al pla $\mathbb{R}^2$, dibuixem tres triangles exteriors equilàters ABF , ACE i BCD sobre els tres costats de ABC . Demostreu que els baricentres dels triangles ABF , ACE i BCD formen un triangle equilàter.
- 5.11 Donat un triangle equilàter ABC de costat 1, trobeu tots els triangles inscrits $A'B'C'$ tals que els angles α, β, γ indicats en la figura siguin rectes:



- 5.12 (a) En un pla afí euclidià es consideren dos punts diferents p i q . Demostreu que les rectes que equidisten d'ambdós punts són les rectes que o bé són paral·leles a la recta pq o bé passen pel punt mig de p i q .
- (b) En un pla afí euclidià es consideren tres punts no alineats p_1, p_2 i p_3 . Trobeu totes les rectes del pla que equidisten d'aquests tres punts.
- 5.13 Siguin A i B dos vèrtexs diametralment oposats d'un cub, i siguin M i N els punts mitjos de dues arestes paral·leles que no passen per A ni per B . Comproveu que els punts A, B, M i N són coplanaris i calculeu l'àrea del polígon $ABMN$ en funció de la longitud de l'aresta del cub.
- 5.14 Demostreu que el lloc geomètric de les projeccions d'un punt P de l'espai afí euclidià de dimensió 3 als plans que passen per una recta donada r és una circumferència.

5.15 Sigui $ABCD$ un tetràedre d'un espai afí euclidià amb $\|\vec{AB}\| = \|\vec{AC}\| = 1$, $\|\vec{AD}\| = 2$, $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$ i $\widehat{CAD} = 30^\circ$. Trobeu:

- (a) l'altura de la cara BCD ;
- (b) l'angle $\widehat{ABC}$;
- (c) l'angle de les cares que passen per l'aresta AB ;
- (d) la distància entre AB i CD .

5.16 En un espai afí euclidià es considera un tetràedre de vèrtexs A, B, C, D tals que $d(A, B) = 2$, $d(A, C) = 2$, $d(A, D) = 1$, $d(B, C) = 3$, $d(B, D) = 2$, $d(C, D) = 2$. Calculeu l'altura del vèrtex D sobre la cara ABC .

5.17 Sigui $ABCD$ un tetràedre de l'espai afí euclidià $\mathbb{A}^3$ i siguin h_C i h_D les altures pels vèrtexs C i D .

- (a) Demostreu que h_C i h_D no són paral·leles.
- (b) Trobeu la perpendicular comuna a h_C i h_D .
- (c) Demostreu que

$$d(h_C, h_D) = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{CD}|}{\|\vec{AB}\|}.$$

5.18 Sigui $ABCD$ un tetràedre de l'espai afí euclidià de dimensió 3.

- (a) Demostreu que si dos parells d'arestes oposades són ortogonals, el tercer també ho és.
- (b) Demostreu que si es compleix la condició anterior, les quatre altures del tetràedre es tallen.

item Sigui $ABCD$ un tetràedre i sigui E l'ortocentre de la cara ABC . Demostreu que si la recta DE és ortogonal a ABC llavors els parells d'arestes oposades del tetràedre són ortogonals.