

3. Afinitats i aplicacions afins

3.1 Sigui $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ una afinitat amb aplicació lineal associada $\tilde{f}: E \rightarrow E$. Donada una varietat lineal $L = a + F$, decideixi si les implicacions següents són certes o falses:

(i) $f(L) = L \implies \tilde{f}(F) = F$.

(ii) $\tilde{f}(F) = F \implies f(L) = L$.

3.2 Sigui $f: \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ l'afinitat del pla donada per les equacions

$$x^* = x - y + 1$$

$$y^* = x + y + 2.$$

(i) Trobeu-ne els punts fixos i les rectes fixes.

(ii) Sigui r la recta d'equació $2x + 3y = 1$. Calculeu les equacions de $f(r)$ i les de $f^{-1}(r)$.

(iii) Trobeu les equacions de la inversa de f .

3.3 En la família d'afinitats

$$x^* = ax + ay + b$$

$$y^* = ax + 6y + b^2$$

hi ha quatre homologies, i els seus eixos formen un paral·lelogram. Trobeu-ne els vèrtexs.

3.4 Estudieu l'afinitat

$$x^* = x - \frac{1}{8}y - \frac{1}{8}$$

$$y^* = 2x - \frac{1}{8}$$

i expresseu-la com a producte d'una homotècia i una homologia.

3.5 (Setembre 1994) Estudieu l'afinitat f que té per equacions

$$x^* = -3x + 2y + 2$$

$$y^* = -2x + 2y + 1.$$

Estudieu també f^n per a $n \geq 2$.

3.6 Sigui $\mathbb{A}$ el pla afí real, on hem escollit una referència $\{p; e_1, e_2\}$. Sigui $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ la família d'afinitats

$$x^* = ax + y + a$$

$$y^* = x + by + a.$$

Estudieu les afinitats d'aquesta família: casos on hi ha només un punt fix; casos on hi ha una recta de punts fixos (homologies) i casos on no hi ha punts fixos. En els casos on no hi ha punts fixos, descomponeu f com una homologia seguida d'una translació paral·lela a l'eix de l'homologia.

3.7 Estudieu la família d'afinitats

$$\begin{aligned}x^* &= (1 + ab)x + by + 1 \\y^* &= -a^2bx + (1 - ab)y + a.\end{aligned}$$

3.8 (Setembre 1999) Sigui f l'afinitat de $\mathbb{A}^2$ d'equacions

$$\begin{aligned}x^* &= -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + 2 \\y^* &= \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}y + 2.\end{aligned}$$

Escriviu f com a composició d'una homologia h i una translació t_u paral·lela a l'eix de h : $f = t_u \circ h$. Determineu l'eix de h . Busqueu el lloc geomètric dels punts mitjos de p i $f(p)$, per a $p \in \mathbb{A}^2$.

3.9 (Gener 2001) Determineu per a quins valors dels paràmetres les afinitats de la família

$$\begin{aligned}x^* &= ax + y + 2 \\y^* &= bx + \frac{1}{2}y - 1\end{aligned}$$

són homologies. Estudieu-les.

3.10 Estudieu la família d'afinitats

$$\begin{aligned}x^* &= ax - y - z + 1 \\y^* &= y + 2z + 1 \\z^* &= -z.\end{aligned}$$

3.11 Sigui $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ l'espai afí real en el qual hem escollit una referència cartesiana $\{p; e_1, e_2, e_3\}$. Estudieu la família d'afinitats

$$\begin{aligned}x^* &= y + z + a \\y^* &= x + z + b \\z^* &= x + y + c.\end{aligned}$$

3.12 (Setembre 1995) Donat un sistema de coordenades en el pla afí, sigui f l'homologia general d'eix $2x - y = 1$, raó 2 i direcció $(0, 1)$, i sigui g l'homologia general d'eix $2x - y = 3$, raó -1 i direcció $(a, 1)$. Estudieu la composició $h = g \circ f$ i determineu per a quins valors de a és h una homologia.

3.13 Considerem les rectes de $\mathbb{A}^2$ que en un sistema de referència afí tenen les equacions següents:

$$r_1 : x + y = 1 \quad r_2 : x + 2y = 0 \quad r_3 : 4x - y = 2.$$

Trobeu l'equació de les afinitats f tals que $f(r_1) = r_2$, $f(r_2) = r_3$, $f(r_3) = r_1$.

3.14 Sigui $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ el pla afí real, on hem escollit una referència cartesiana $\{p; e_1, e_2\}$.

- (i) Sigui $f: \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ una afinitat que deixa fixos tots els punts de la recta $x - 2y + 1 = 0$ i envia el punt $Q = (0, -1)$ al punt $f(Q) = (2, 0)$. Trobeu les equacions de f i estudieu-la.
- (ii) Sigui $g: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ l'afinitat que transforma $Q = (2, 1)$, $N = (1, 2)$, $M = (2, 2)$ en $g(Q) = (3, 1)$, $g(N) = (1, 3)$, $g(M) = (3, 3)$. Trobeu les equacions de g i estudieu-la.

3.15 (Setembre 2000) Sigui $\mathbb{A}^2$ el pla afí real i sigui $\{O; e_1, e_2\}$ una referència en $\mathbb{A}^2$. Sigui f una afinitat tal que $f(O) = O$, $f(1, 1) = (2, 2)$ i $f(1, -1) = (0, a)$.

- (i) Per a quins valors de a és f una homologia?
- (ii) Estudieu f per al valor $a = -2$.

3.16 (Setembre 1998) Fixada una referència de $\mathbb{A}^3$, considerem les afinitats $f_a: \mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{A}^3$, amb $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, que transformen el punt $(1, 0, 0)$ en el punt $(0, a, a)$ i que restringides al pla $\pi: x + y + z = 0$ donen una simetria central de centre l'origen.

- (i) Trobeu les equacions de les afinitats f_a .
- (ii) Determineu, segons els valors de a , els punts fixos de f_a .
- (iii) Determineu, segons els valors de a , les rectes invariants de f_a .

3.17 A l'espai afí real referit a un cert sistema de referència, tenim els punts

$$A = (1, 8 - a, 1), \quad B = (2, 0, 3), \quad C = (4, -2, a), \quad D = (0, 1, \tfrac{1}{4}a)$$

i el pla $\pi: z = 0$. Per a cada punt $P \in \pi$, sigui G_P el baricentre dels punts $\{A, B, C, D\}$, i sigui P' la intersecció de la recta DG_P amb el pla π . Demostreu que la transformació que envia cada punt $P \in \pi$ a P' és una afinitat i estudieu-la.

3.18 Donats quatre punts a, b, c, d de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, tres d'ells independents, trobeu la condició que han de complir perquè existeixi una afinitat f tal que $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = d$ i $f(d) = a$. Determineu els punts fixos i les rectes fixes d'aquesta afinitat.

3.19 Sigui f una afinitat de $\mathbb{A}^n$. Proveu que f és una homotècia o una translació si i només si transforma tota recta de $\mathbb{A}^n$ en una recta paral·lela a ella.

3.20 Demostreu que el conjunt $\mathcal{T}$ de translacions de $\mathbb{A}$ és un subgrup normal del grup $\mathcal{A}$ de totes les afinitats de $\mathbb{A}$, és a dir, demostreu que $\mathcal{T}$ és un subgrup i que, per a tota afinitat f i tota translació t_u , l'afinitat $f^{-1}t_u f$ és una translació.

3.21 Sigui A un espai afí de dimensió n .

- (i) Estudieu la composició de dues homotècies arbitràries de A .
- (ii) Estudieu les composicions d'una homotècia h i una translació t_u , és a dir, ht_u i $t_u h$.
- (iii) Demostreu que el conjunt $\mathcal{S}$ format per les translacions i les homotècies de A és un grup amb la composició.

- 3.22 Estudieu el grup de les afinitats del pla que deixen invariant un triangle donat.
- 3.23 Estudieu l'afinitat del pla que transforma els vèrtexs d'un triangle en els punts mitjos dels costats oposats.
- 3.24 (Juny 1998) Es consideren en el pla afí $\mathbb{A}^2$ tres punts A_1, A_2, A_3 no alineats. Si B_1, B_2, B_3 són respectivament els punts mitjos de A_2A_3, A_1A_3, A_1A_2 i C_1, C_2, C_3 són els punts mitjos de B_2B_3, B_1B_3, B_1B_2 . Estudieu l'afinitat que transforma els A_i en els C_i , per a $i = 1, 2, 3$.
- 3.25 (Maig 1998) Sigui ABC un triangle de $\mathbb{A}^2$ i siguin A_1, B_1, C_1 els punts mitjos dels costats BC, AC i AB respectivament. Es consideren les homologies especials determinades per les condicions següents: h_1 l'homologia d'eix AC i tal que $h_1(C_1) = A_1$; h_2 l'homologia d'eix AB i tal que $h_2(A_1) = B_1$; h_3 l'homologia d'eix BC i tal que $h_3(B_1) = C_1$. Determineu els punts fixos i les rectes fixes per la composició $h_3 \circ h_2 \circ h_1$.
- 3.26 Siguin F, A, A^* tres punts alineats del pla afí. Considerem totes les afinitats del pla que deixen fix F , transformen A en A^* i tenen una única recta fixa.
- (i) Trobeu el lloc geomètric de les imatges d'un punt donat per aquestes afinitats.
 - (ii) Demostreu que existeix una homotècia tal que les afinitats anteriors són el producte d'aquesta homotècia per les homologies especials d'eix FA .
- 3.27 Sigui ABC un triangle del pla i sigui O un punt que no pertany a cap dels seus costats. Siguin A', B', C' els punts mitjos dels segments BC, AC i AB respectivament, i siguin A'', B'', C'' les imatges de A', B', C' per l'homotècia de centre O i raó r . Demostreu que, si $r \neq -2$, llavors les rectes AA'', BB'', CC'' són concurrents. Què passa si $r = -2$?
- 3.28 Donats dos punts A i B sobre una recta r i un punt C fora de r , considerem totes les homologies especials tals que el seu eix passa per A i que transformen el punt C en un punt de r . Determineu el lloc geomètric de les imatges del punt B per totes aquestes homologies.
- 3.29 Siguin A, B, C els tres vèrtexs d'un triangle i siguin h_1, h_2, h_3 les homotècies de centres A, B, C i raons α, β, γ respectivament. Considerem $h = h_3 \circ h_2 \circ h_1$.
- (i) Determineu h en el cas $\alpha = \beta = \gamma = -1$.
 - (ii) Si h és una simetria central i una de les homotècies h_1, h_2, h_3 també ho és, determineu els possibles centres de h .
- 3.30 (Juliol 1993) Donat un paral·lelogram $OASB$ del pla afí (on OS és una diagonal), considerem totes les afinitats que transformen el punt A en el punt mig de OB , el punt B en el punt mig de OA i el punt O en un punt de la recta OS .
- (i) Demostreu que cap d'aquestes afinitats no és una homologia.
 - (ii) Demostreu que hi ha una única afinitat sense punts fixos i descomponeu-la com a producte d'una homologia i una translació de vector paral·lel a l'eix.

- 3.31 Sigui $ABCD$ un paral·lelogram de diagonals AC i BD del pla afí. Estudieu l'afinitat f determinada per les condicions

$$f(A) = B, \quad f(B) = D, \quad f(C) = A.$$

Demostreu que f s'expressa, de forma única, com una homologia seguida d'una simetria central amb centre sobre l'eix de l'homologia.

- 3.32 (Juny 1994) Donat un paral·lelogram $ABCD$ en el pla afí, considerem la família d'afinitats f tals que $f(A) = B$, $f(B) = C$ i $f(C)$ és un punt de la recta AD .

- (i) Demostreu que hi ha una única afinitat de la família sense punts fixos i descomponeu-la com a producte d'una homologia seguida d'una translació.
- (ii) Demostreu que totes les altres afinitats de la família tenen un punt fix i trobeu el lloc geomètric d'aquest punt.

- 3.33 Busqueu el lloc geomètric de les imatges d'un punt de $\mathbb{A}^3$ per totes les afinitats que tenen una recta donada r de punts fixos i una recta fixa s que es creua amb r .

- 3.34 (Juny 1999) Siguin A, B, C, D punts linealment independents de l'espai afí real de dimensió tres. Sigui G el baricentre de $\{A, B, C\}$. Escolliu un sistema de referència i trobeu les equacions de l'afinitat f que compleix:

- (i) El pla π determinat per ABC és invariant per f i la restricció de f a π és una homologia general de raó r , eix AB i direcció AG .
- (ii) $f(D)$ és el baricentre de $\{A, B, C, D\}$.

Busqueu els punts fixos i les rectes fixes (invariants) per f .

- 3.35 Recordeu que una *homologia* és una afinitat que té un hiperplà de punts fixos. Sigui f una homologia del pla. Diem que f és *general de raó* ρ si $\rho = \det(\tilde{f}) \neq 1$, on $\tilde{f}$ és l'automorfisme associat a f . Si el determinant és 1, diem que f és *especial*. Anomenem *eix* a la recta de punts fixos.

- (i) Trobeu les rectes invariants per una homologia.
- (ii) Demostreu que si f és general i x és un punt que no és fix, aleshores la recta $x \vee f(x)$ talla l'eix en un punt p i

$$(p, x, f(x)) = \rho.$$

- (iii) Proveu que si f és especial i x és un punt que no és fix, aleshores la recta $x \vee f(x)$ és paral·lela a l'eix.
- (iv) Determineu gràficament la imatge d'un punt per f a partir de: l'eix, les rectes invariants i la raó en el cas general, i l'eix i la imatge d'un punt donat (no fix) en el cas especial.