

4. Espais vectorials euclidians

4.1 Sigui E un espai vectorial real de dimensió 3 i sigui $\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal que en una base $\{e_1, e_2, e_3\}$ té la matriu

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Demostreu que φ és un producte escalar i trobeu una base ortonormal.
- (ii) Trobeu els subespais ortogonals $F^\perp$ i $G^\perp$ de $F = \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle$ i de $G = \langle e_1, e_2 \rangle$.

4.2 Sigui E un espai vectorial real de dimensió 3 i sigui $\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal que en una base $\{e_1, e_2, e_3\}$ té la matriu

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -4 & 8 & -4 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (i) Demostreu que φ és un producte escalar i trobeu una base ortonormal.
- (ii) Trobeu les coordenades de $w = e_1 + e_2 + e_3$ en la base ortonormal que hagueu trobat a l'apartat (i).

4.3 Sigui $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simètrica de $\mathbb{R}^3$ tal que:

$$\begin{aligned} f(e_1, e_1) &= 1; & f(u, e_1) &= 1; & f(e_2, e_2) &= 2; \\ f(u, e_2) &= 1; & f(e_3, e_3) &= 5; & f(v, v) &= 9; \end{aligned}$$

on $\{e_1, e_2, e_3\}$ és una base de $\mathbb{R}^3$, $u = 2e_1 - e_3$ i $v = e_2 - e_3$.

- (i) Proveu que f queda unívocament determinada i trobeu la matriu associada a f en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$.
- (ii) Trobeu $\langle e_1 \rangle^\perp$ (el subespai ortogonal a e_1 per f).

4.4 Comproveu que la forma bilineal simètrica f de $\mathbb{R}^3$ definida per

$$f((x, y, z), (x', y', z')) = 2xx' + 5yy' + 5zz' + 2xy' + 2x'y - 2xz' - 2x'z - 4yz' - 4y'z$$

és un producte escalar.

- (i) Determineu una base ortonormal per a f i expresseu f en aquesta base.
- (ii) Calculeu la norma deduïda de f del vector $(1, 1, 1)$.
- (iii) Trobeu $\langle (1, 0, 0), (1, 1, 0) \rangle^\perp$ (respecte a f).

4.5 Sigui f una forma bilineal simètrica de $\mathbb{R}^3$ que verifica el següent:

- (a) els vectors $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (1, 1, 0)$ i $u_3 = (1, 1, 1)$ són isòtrops per a f , és a dir, $f(u_i, u_i) = 0$ per a $i = 1, 2, 3$;
- (b) $f((1, 2, 0), (2, 1, 0)) = 1$;
- (c) $\langle (3, 2, 1) \rangle^\perp = \{(x, y, z) \mid y = -2x\}$.

Doneu la matriu associada a f en la base canònica.

4.6 Sigui $\mathbb{R}_2[x]$ l'espai vectorial dels polinomis reals de grau menor o igual que 2. Definim

$$\varphi(p, q) = \int_0^1 p(x) q(x) dx.$$

Demostreu que φ és un producte escalar. Busqueu una base ortonormal i una base del subespai ortogonal al polinomi $2x + 1$.

4.7 (Juny 1995) Siguin E_n l'espai vectorial dels polinomis a coeficients reals de grau menor o igual que n i $f: E_n \times E_n \rightarrow \mathbb{R}$ l'aplicació definida per

$$f(P, Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1), \quad \text{on } P, Q \in E_n.$$

- (i) Demostreu que f és un producte escalar si i només si $n \leq 2$.
- (ii) Determineu una base ortonormal de E_2 .

4.8 (Setembre 1996) Sigui E_2 l'espai vectorial dels polinomis de grau ≤ 2 a coeficients reals. Si a E_2 tenim un producte escalar per al qual els polinomis $1 + 3x$, $1 + 4x$, x^2 són unitaris i ortogonals,

- (i) busqueu el mòdul de $1 + 7x^2$;
- (ii) busqueu tots els polinomis ortogonals a l'anterior.

4.9 Sigui E un espai vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensió 3 i sigui $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de E . Definim una aplicació $\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ tal que, si $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$ i $v = x'e_1 + y'e_2 + z'e_3$,

$$\varphi(u, v) = x\bar{x}' - iy\bar{x}' + ix\bar{y}' + (1 + 3i)y\bar{z}' + 9z\bar{z}' + (1 - 3i)z\bar{y}' + 3y\bar{y}'.$$

- (i) Demostreu que φ és un producte escalar i trobeu una base ortonormal.
- (ii) Trobeu $\langle -e_1 + e_2 + ie_3 \rangle^\perp$.

4.10 Sigui $\varphi_a: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ l'aplicació definida per

$$\varphi_a(u, v) = axx' + ayy' + (a-1)zz' + xy' + yx'.$$

- (i) Determineu els valors del paràmetre a per als quals φ_a és un producte escalar i trobeu una base ortonormal en cada cas.
- (ii) Determineu $\langle (1, 0, 1), (1, 1, 0) \rangle^\perp$ en cadascun d'aquests casos.

4.11 Sigui E l'espai vectorial de les matrius $n \times n$ sobre els reals. Definim

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: E \times E \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{com} \quad \langle A, B \rangle = \text{tr } AB^t \quad \text{per a } A, B \in E$$

(on tr indica la traça).

- (i) Demostreu que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ és un producte escalar i trobeu la seva matriu en la base canònica de E (formada per les matrius amb tots els elements iguals a 0 llevat d'un element que és igual a 1).
- (ii) Demostreu que el conjunt F de les matrius de E amb traça 0 és un subespai vectorial. Trobeu una base ortonormal de F en el cas $n = 3$.
- (iii) Trobeu $F^\perp$.

4.12 Siguin $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espai vectorial euclidià, F un altre espai vectorial i $f: F \rightarrow E$ una aplicació lineal. Per a $u, v \in F$ arbitraris, definim

$$u \cdot v = \langle f(u), f(v) \rangle.$$

Proveu que aquesta operació és un producte escalar a F si i només si f és injectiva.

4.13 Sigui $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal d'un espai euclidià E i sigui $A = (a_i^j)$ una matriu $n \times n$ real. Demostreu que els vectors columna $a_i = \sum_j a_i^j e_j$, $i = 1, \dots, n$, formen una base ortonormal si i només si els vectors fila $a^j = \sum_i a_i^j e_i$ formen una base ortonormal. Què passa si E és un espai unitari i A una matriu complexa?

4.14 Siguin E un espai vectorial euclidià i $u, v \in E$. Proveu que:

- (i) $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u \cdot v$;
- (ii) $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2u \cdot v$.

4.15 Siguin E un espai vectorial euclidià i $u, v \in E$. Demostreu les implicacions següents o doneu un contraexemple:

- (i) Si u és ortogonal a v , llavors $\|u + xv\| \geq \|u\|$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.
- (ii) Si $\|u + xv\| \geq \|u\|$ per a tot $x \in \mathbb{R}$, llavors u és ortogonal a v .

4.16 Siguin u, v elements d'un espai vectorial euclidià tals que $\|u\| = \|v\|$. Proveu que aleshores $u + v$ i $u - v$ són ortogonals.

4.17 Siguí E un espai vectorial euclidià i $\cdot$ el seu producte escalar.

- (i) Demostreu que $|u \cdot v| = \|u\| \|v\|$ si i només si u i v són linealment dependents.
- (ii) Suposem que $v \neq \vec{0}$. Demostreu que $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$ si i només si $u = \lambda v$ amb $\lambda \geq 0$.

4.18 Siguin $F, G \subseteq E$ subespais d'un espai vectorial euclidià de dimensió finita. Proveu que:

- (i) $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$;
- (ii) $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

4.19 Siguí E un espai euclidià orientat i $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de E . Definim

$$u_1 = (e_2 \wedge e_3) \wedge e_1, \quad u_2 = (e_3 \wedge e_1) \wedge e_2, \quad u_3 = (e_1 \wedge e_2) \wedge e_3.$$

- (i) Demostreu que $\dim \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \leq 2$.
- (ii) Demostreu que $\dim \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \leq 1$ si i només si un dels vectors u_i és $\vec{0}$.
- (iii) Demostreu que si $\dim \langle u_1, u_2, u_3 \rangle = 2$, llavors el vector

$$(e_3 \cdot e_1)(e_3 \cdot e_2)(e_1 \wedge e_2) + (e_1 \cdot e_2)(e_1 \cdot e_3)(e_2 \wedge e_3) + (e_2 \cdot e_1)(e_2 \cdot e_3)(e_3 \wedge e_1)$$

és base del subespai ortogonal $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle^\perp$.

4.20 (Setembre 1994) Siguin u_1, u_2, u_3 tres vectors d'un espai vectorial euclidià orientat E de dimensió tres. Siguin

$$v_1 = u_2 \wedge u_3, \quad v_2 = u_3 \wedge u_1, \quad v_3 = u_1 \wedge u_2.$$

- (i) Demostreu que $\det(v_1, v_2, v_3) = \det(u_1, u_2, u_3)^2$.
- (ii) Demostreu que
 - (a) $\text{rang}(u_1, u_2, u_3) \leq 1 \Leftrightarrow \text{rang}(v_1, v_2, v_3) = 0$.
 - (b) $\text{rang}(u_1, u_2, u_3) = 2 \Leftrightarrow \text{rang}(v_1, v_2, v_3) = 1$.
 - (c) $\text{rang}(u_1, u_2, u_3) = 3 \Leftrightarrow \text{rang}(v_1, v_2, v_3) = 3$.