

5. Espais afins euclidians

5.1 Considerem en un pla afí euclidià una referència $\{O; e_1, e_2\}$ on $\widehat{e_1 e_2} = 60^\circ$ i e_1, e_2 són unitaris. Considerem també la recta $r: 2x + y - 1 = 0$ i el punt $p = (1, 1)$.

- (i) Trobeu la recta que passa per p i és paral·lela a r .
- (ii) Trobeu la recta que passa per p i és perpendicular a r .
- (iii) Trobeu la distància $d(p, r)$.

5.2 Sigui $\mathbb{A}$ un espai afí euclidià de dimensió 3. Calculeu les coordenades de la projecció ortogonal del punt $(1, -2, 3)$ sobre el pla $x - y + 2z = 0$ suposant que tenim a $\mathbb{A}$ una referència:

- (i) ortonormal;
- (ii) de vectors unitaris que formen angles de 60° entre ells.

Trobeu la distància del punt al pla en tots dos casos.

5.3 Sigui $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ una referència de $\mathbb{A}^3$ de la qual se sap que tots tres vectors són unitaris, e_1 i e_2 són ortogonals i la recta que passa per O i $(1, 0, -2)$ i el pla d'equació

$$\pi: 2y + 3z + d = 0$$

són ortogonals. Determineu l'angle que formen els altres vectors de la base i el valor de d per tal que la distància del punt $(1, 1, 1)$ al pla π sigui $\frac{1}{2}$.

5.4 Considerem una referència $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ en un espai afí euclidià de dimensió tres on $\widehat{e_1 e_2} = \widehat{e_1 e_3} = \widehat{e_2 e_3} = 60^\circ$ i e_1, e_2, e_3 són unitaris. Considerem també les rectes

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3}, \quad s: \begin{cases} x+y+z = 1 \\ x-y+z = 2. \end{cases}$$

Trobeu el cosinus de l'angle que formen les rectes r i s .

5.5 (Juny 1994) En un espai afí euclidià de dimensió tres tenim dues rectes que, en una referència ortonormal, tenen les equacions:

$$r: \begin{cases} x+z=0 \\ y=-2, \end{cases} \quad s: \begin{cases} x=1 \\ y-z+3=0. \end{cases}$$

- (i) Trobeu les equacions de la perpendicular comú i les seves interseccions amb r i s .
- (ii) Trobeu les rectes paral·leles a la perpendicular comú que tallen r i disten $\sqrt{\frac{3}{2}}$ de s . Busqueu també els seus punts de tall amb r .

5.6 (Juny 1995) En un sistema de referència ortonormal d'un espai afí euclidià de dimensió 3 considerem els punts $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 1, 2)$, $C = (2, 2, 1)$ i $D = (1, -2, 3)$. Trobeu:

- (i) Els punts de tall de la perpendicular comú a les rectes AB i CD amb aquestes rectes.
- (ii) El simètric del punt C respecte al pla ABD .
- (iii) El cosinus de l'angle format pels vectors $\vec{AB}$ i $\vec{CD}$.
- (iv) La distància del punt C a la recta AD .

5.7 Donat un sistema de coordenades ortonormal a l'espai euclidià de dimensió 3, considerem el tetràedre de vèrtexs $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (1, 2, 0)$ i $D = (1, 1, 1)$. Determineu el pla que conté la perpendicular comú a AC i BD i passa pel simètric de A respecte del pla BCD .

5.8 Donats tres punts linealment independents de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, demostreu que la intersecció dels plans que passen per un dels punts i són perpendiculars a la recta determinada pels altres dos és una recta perpendicular al pla que conté els tres punts.

5.9 (Setembre 1994) A l'espai afí euclidià real de dimensió 3 tenim tres rectes situades en els plans coordenats. Suposem que, en una referència ortonormal, les seves equacions són

$$r: \begin{cases} x = az + p \\ y = 0, \end{cases} \quad s: \begin{cases} y = bz + q \\ x = 0, \end{cases} \quad t: \begin{cases} cx + dy = m \\ z = 0. \end{cases}$$

Busqueu quines condicions han de complir els paràmetres a, p, b, q, c, d, m per tal que r, s i t siguin les projeccions ortogonals sobre els plans coordenats d'una mateixa recta de l'espai.

5.10 Siguin A i A_1 dos vèrtexs diametralment oposats d'un cub, i M i N els punts mitjos de dues arestes paral·leles que no passen per A ni per A_1 . Comproveu que els punts A, A_1, M i N són coplanaris i calculeu l'àrea del polígon AA_1MN en funció de la longitud de l'aresta del cub.

5.11 Busqueu el lloc geomètric de les projeccions d'un punt P de l'espai afí euclidià de dimensió 3 als plans que passen per una recta donada r . (Demostreu que aquest lloc és una circumferència.)

- 5.12 (i) Demostreu que les medianes d'un triangle es tallen en un punt (el *baricentre*).
- (ii) Demostreu que les altures d'un triangle es tallen en un punt (l'*ortocentre*).
- (iii) Demostreu que les mediatris d'un triangle es tallen en un punt (el *circumcentre*).

5.13 Donades dues rectes $r: a + \langle u \rangle$ i $s: a + \langle v \rangle$, on u i v són unitaris, les seves *bisectrius* són les rectes $t_1: a + \langle u + v \rangle$ i $t_2: a + \langle u - v \rangle$.

- (i) Demostreu que $t_1 \cup t_2$ és el lloc geomètric dels punts p tals que $d(p, r) = d(p, s)$.
- (ii) Demostreu que les bisectrius t_1 i t_2 són sempre rectes perpendiculars.
- (iii) Demostreu que les bisectrius d'un triangle es tallen en un punt (l'*incentre*).

5.14 Siguin A, B, C tres punts d'un pla afí euclidià i sigui $\{e_1, e_2\}$ una base ortonormal de l'espai vectorial euclidià associat.

(i) Demostreu que

$$\det_{\{e_i\}}(\vec{AB}, \vec{AC}) = \det_{\{e_i\}}(\vec{BC}, \vec{BA}) = \det_{\{e_i\}}(\vec{CA}, \vec{CB}).$$

Es defineix l'àrea del paral·lelogram determinat per ABC com el valor d'aquests determinants (amb el seu signe), i l'àrea del triangle ABC com la meitat d'aquest valor. Demostreu que si les coordenades dels punts són $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$, en una referència $\{P; e_1, e_2\}$, aleshores

$$\text{àrea}(ABC) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

(ii) Comproveu que l'àrea de ABC és igual, llevat del signe, a la meitat del producte d'una base per l'altura.

(iii) Sigui G el baricentre dels punts A, B, C . Demostreu que els triangles ABG , BCG i CAG tenen la mateixa àrea.

(iv) Suposem que $\text{àrea}(ABC) = 1$. Donat un punt arbitrari $P = aA + bB + cC$, amb $a + b + c = 1$, calculeu l'àrea dels triangles PAB , PBC i PCA en funció de a, b i c .

5.15 Siguin A, B, C, D quatre punts d'un espai afí euclidià de dimensió tres i sigui $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormal de l'espai vectorial euclidià associat.

(i) Demostreu que

$$\det_{\{e_i\}}(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = -\det_{\{e_i\}}(\vec{BC}, \vec{BD}, \vec{BA}) = \det_{\{e_i\}}(\vec{CD}, \vec{CA}, \vec{CB}) = \dots$$

(el signe varia segons que la permutació dels vèrtexs sigui parell o senar). Es defineix el volum del paral·lelepíped determinat per $ABCD$ com el valor d'aquests determinants (amb el seu signe), i el volum del tetràedre $ABCD$ com un sisè d'aquest valor. Demostreu que si les coordenades dels punts són $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$, $D = (d_1, d_2, d_3)$ en una referència $\{P; e_1, e_2, e_3\}$, aleshores

$$\text{volum}(ABCD) = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

(ii) Comproveu que, llevat del signe, és un sisè de l'àrea de la base per l'altura.

(iii) Sigui G el baricentre dels punts A, B, C, D . Calculeu el volum dels tetràedres $ABCG$, $BCDG$, $CDAG$ i $DABG$ (amb el seu signe).

5.16 Sigui $ABCD$ un tetràedre de l'espai afí euclidià de dimensió 3.

- (i) Demostreu que si dos parells d'arestes oposades són ortogonals, llavors el tercer parell també ho és.
- (ii) Demostreu que si es compleix la condició anterior, llavors les quatre alçades del tetràedre es tallen.

5.17 Sigui $ABCD$ un tetràedre de l'espai afí euclidià $\mathbb{A}^3$ amb $\|\vec{AB}\| = \|\vec{AC}\| = 1$, $\|\vec{AD}\| = 2$, $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$ i $\widehat{CAD} = 30^\circ$. Trobeu: l'alçada de la cara BCD ; l'angle $\widehat{ABC}$; l'angle de les cares que passen per l'aresta AB ; la distància entre AB i CD .

5.18 Sigui $ABCD$ un tetràedre de l'espai afí euclidià $\mathbb{A}^3$ i siguin h_C , h_D les altures pels vèrtexs C , D , respectivament.

- (i) Proveu que h_C i h_D no són paral·leles.
- (ii) Trobeu la perpendicular comú a h_C i h_D .
- (iii) Proveu que

$$d(h_C, h_D) = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{CD}|}{\|\vec{AB}\|}.$$

5.19 (Juny 1998) Calculeu la distància entre dues arestes oposades d'un tetràedre regular de l'espai afí euclidià $\mathbb{A}^3$ en funció de la longitud de les arestes.

5.20 (Setembre 1998) Es considera un tetràedre $ABCD$ de l'espai afí euclidià $\mathbb{A}^3$ que satisfà $1 = d(A, B) = d(A, C) = d(A, D)$ i $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$, $\widehat{BAD} = \widehat{CAD} = \frac{\pi}{3}$. Calculeu:

- (i) l'angle entre les arestes AD i BC ;
- (ii) l'angle entre les arestes AB i DC ;
- (iii) la distància entre el vèrtex D i la cara ABC .

5.21 (Setembre 2003) En un espai afí euclidià $\mathbb{A}^3$ de dimensió 3, considerem les rectes L i M que, en un sistema de referència ortonormal, tenen equacions:

$$L: \{y = 0, z = 0\}, \quad M: \{y = 0, z = 1\}$$

i un punt $p = (1, 1, 1)$. Trobeu les rectes de $\mathbb{A}^3$ que passen per p i equidisten de L i M .