

6. Endomorfismes ortogonals, simètrics, unitaris i hermítics

6.1 Sigui E un $\mathbb{R}$ -espai vectorial de dimensió 3 i sigui $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base. Considereu la forma bilineal que en la base anterior té per matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

(i) Comproveu que es tracta d'un producte escalar.

(ii) Trobeu l'adjunt f^* de l'endomorfisme f que té per matriu $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ en la base donada.

6.2 Sigui E un espai vectorial euclidià i sigui $f \in \text{End}(E)$ tal que $\|f(x)\| \leq \|x\|$ per a tot $x \in E$, i sigui g la seva adjunta. Demostreu que:

- (i) $\|g(x)\| \leq \|x\|$ per a tot $x \in E$;
- (ii) $\text{Ker}(g - \text{Id}) = \text{Ker}(f - \text{Id})$;
- (iii) $E = \text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Im}(f - \text{Id})$.

6.3 Sigui E un espai vectorial euclidià de dimensió 3. Siguin e_1, e_2, e_3 tres vectors linealment independents unitaris i tals que:

$$e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_3 = e_3 \cdot e_1 = \frac{1}{2}.$$

Sigui φ l'endomorfisme determinat per: $\varphi(e_1) = e_2$, $\varphi(e_2) = e_3$, $\varphi(e_3) = e_1$. Determineu l'adjunt φ^* de φ i calculeu $\varphi \circ \varphi^*$.

6.4 (Juny 1998) Sigui φ un endomorfisme d'un espai vectorial euclidià E de dimensió n i sigui φ^* el seu adjunt. Demostreu que $\varphi^* \circ \varphi$ diagonalitza en una base ortonormal i que tots els seus valors propis són nombres reals no negatius.

6.5 (Setembre 1998) Demostreu que per a tot endomorfisme ortogonal propi φ d'un espai vectorial euclidià E de dimensió n n'existeix un altre, ψ , que compleix $\psi^2 = \varphi$.

6.6 Sigui E un espai vectorial euclidià. Demostreu que si F és un subespai vectorial de E invariant per $f \in O(E)$, llavors $F^\perp$ també és invariant per f .

6.7 Sigui E un espai vectorial euclidià orientat de dimensió 3. Proveu que:

- (i) Si $\phi \in SO(E)$, aleshores $\phi(u \wedge v) = \phi(u) \wedge \phi(v)$.
- (ii) Si $\phi \in O(E) \setminus SO(E)$, aleshores $\phi(u \wedge v) = -\phi(u) \wedge \phi(v)$.

6.8 Estudieu els endomorfismes que en una base ortonormal tenen les matrius següents:

$$\begin{aligned} & \pm \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}; & \pm \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 4 & -7 \\ -1 & 8 & 4 \\ -8 & 1 & -4 \end{pmatrix}; & \pm \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 \\ 8 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}; \\ & \pm \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}; & \pm \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; & \pm \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6.9 Sigui f una aplicació lineal amb matriu A en una base en la qual el producte escalar té una matriu G . Estudieu si f és ortogonal en els casos següents:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & G &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \\ A &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}-1}{4} & \frac{-(1+\sqrt{3})}{4} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{3-\sqrt{3}}{4} & \frac{1-\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1+\sqrt{3}}{4} & \frac{3+\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}, & G &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6.10 Sigui E un espai vectorial euclidià i sigui $u \in E$ un vector unitari. Demostreu que els endomorfismes

$$f(x) = x - 2(u \cdot x)u, \quad g(x) = 2(u \cdot x)u - x, \quad \text{per a tot } x \in E,$$

són ortogonals. Comproveu que són simetries amb subespais de vectors fixos $\langle u \rangle^\perp$ i $\langle u \rangle$, respectivament. Suposem que E té dimensió 3 i que $\{e_1, e_2, e_3\}$ és una base ortonormal de E . Sigui $u = ae_1 + be_2 + ce_3$. Calculeu les matrius de les simetries f i g en aquesta base.

6.11 Sigui E un espai vectorial euclidià orientat de dimensió 3 i sigui $u \in E$ un vector unitari.

(i) Demostreu que l'endomorfisme

$$g(x) = \cos \alpha x + \sin \alpha (u \wedge x) + (u \cdot x)(1 - \cos \alpha) u$$

és ortogonal. Comproveu que $g(u) = u$ i que g indueix a $\langle u \rangle^\perp$ una rotació d'angle α .

(ii) Siguin $u = (a, b, c)$ les coordenades de u en una base ortonormal positiva $\{e_1, e_2, e_3\}$. Trobeu la matriu de g en aquesta base.

6.12 Trobeu la composició $g_2 \circ g_1$ on g_1 és el gir d'eix $\langle (1, 1, 0) \rangle$ que envia $(1, -1, 0)$ a $(0, 0, \sqrt{2})$ i g_2 és el gir d'eix $\langle (1, 1, 1) \rangle$ que envia $(1, -1, 0)$ a $(1, 0, -1)$.

6.13 Siguin g_1 i g_2 rotacions vectorials d'angles α i β al voltant d'eixos ortogonals de l'espai vectorial euclidià de dimensió 3. Estudieu $g_1 \circ g_2$ suposant que $\alpha = \beta = 60^\circ$. Quins haurien de ser α i β per tal que $g_1 \circ g_2$ fos un gir d'eix contingut en el subespai vectorial generat pels eixos de g_1 i g_2 ?

- 6.14 Determineu el subgrup de $O(2)$ de les aplicacions que deixen invariant el conjunt format per dos subespais de dimensió 1 ortogonals. El mateix amb dos subespais de dimensió 1 no ortogonals.
- 6.15 Demostreu que tota rotació de $SO(3)$ es pot descompondre com a producte de dues simetries especulars i que una d'elles es pot prendre arbitràriament entre els plans que contenen l'eix de la rotació.
- 6.16 Descomponeu l'aplicació ortogonal que en una base ortonormal té per matriu

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

en producte de dues simetries especulars. Doneu les equacions dels plans de simetria.

- 6.17 Empreneu el problema anterior per a estudiar el producte de:
- (i) una simetria especular i una rotació d'eix contingut en el pla de simetria;
 - (ii) dues simetries axials d'eixos perpendiculars;
 - (iii) dues rotacions d'eixos diferents.

- 6.18 En una base $\{e_1, e_2\}$ d'un espai euclidià, una rotació vectorial té per matriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Determineu l'angle de la rotació, l'angle dels vectors e_1, e_2 i la raó $\frac{\|e_2\|}{\|e_1\|}$.

- 6.19 (Maig 1998) Sigui E un espai vectorial euclidià de dimensió 3, i siguin e_1, e_2 dos vectors linealment independents i unitaris tals que $e_1 \cdot e_2 = \frac{1}{2}$. Sigui $f: E \rightarrow E$ definida per

$$f(v) = v \wedge (e_1 \wedge e_2) + (v \cdot (e_1 \wedge e_2))e_1 \wedge e_2.$$

- (i) Demostreu que f és lineal.
 - (ii) Demostreu que $\det(f) = \|e_1 \wedge e_2\|^4$.
 - (iii) Determineu l'adjunta f^* de f .
- 6.20 (Juny 2003) En un espai vectorial euclidià orientat E de dimensió 3 es considera un vector $u \in E$ fixat. Sigui $\varphi: E \rightarrow E$ l'aplicació

$$\varphi(x) = x + u \wedge x, \quad \text{per a tot } x \in E.$$

- (i) Demostreu que φ és un endomorfisme normal de E .
- (ii) Determineu per a quins valors de u l'endomorfisme φ és simètric i per a quins és ortogonal.