

7. Desplaçaments

- 7.1 (Setembre 1995) Estudieu el desplaçament de l'espai que en una referència ortonormal té les equacions següents:

$$\begin{cases} x^* = (3/5)x - (3/\sqrt{15})y + (1/5)z + 1 \\ y^* = (3/\sqrt{15})x + (1/2)y - (3/(2\sqrt{15}))z \\ z^* = (1/5)x + (3/(2\sqrt{15}))y + (9/10)z + 2. \end{cases}$$

- 7.2 Classifiqueu els desplaçaments següents de l'espai afí euclidià de dimensió 3 i trobeu els eixos, els plans de simetria i els angles corresponents en cada cas (les equacions estan donades en un sistema de referència ortonormal):

$$\begin{cases} x^* = (4/9)x - (7/9)y + (4/9)z - 2/9 \\ y^* = -(1/9)x + (4/9)y + (8/9)z + 2/9 \\ z^* = -(8/9)x - (4/9)y + (1/9)z + 1/9, \end{cases} \quad \begin{cases} x^* = (\sqrt{2}/2)x + (\sqrt{2}/2)y \\ y^* = z + 1 \\ z^* = (\sqrt{2}/2)x - (\sqrt{2}/2)y - 1, \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^* = (4/9)x + (4/9)y - (7/9)z + 1/9 \\ y^* = -(1/9)x + (8/9)y + (4/9)z + 5/9 \\ z^* = -(8/9)x + (1/9)y - (4/9)z, \end{cases} \quad \begin{cases} x^* = -(1/3)x - (2/3)y + (2/3)z + 1/3 \\ y^* = -(2/3)x - (1/3)y - (2/3)z + 1 \\ z^* = (2/3)x - (2/3)y - (1/3)z + 2/3. \end{cases}$$

- 7.3 (Juny 1996) Considereu el desplaçament de l'espai afí euclidià que en un sistema de referència ortonormal té les equacions següents:

$$\begin{cases} x^* = (\sqrt{2}/2)x - (1/2)y + (1/2)z \\ y^* = (1/2)x + ((2 + \sqrt{2})/4)y + ((2 - \sqrt{2})/4)z + 3/2 \\ z^* = -(1/2)x + ((2 - \sqrt{2})/4)y + ((2 + \sqrt{2})/4)z + 3/2. \end{cases}$$

Classifiqueu-lo i trobeu els seus elements geomètrics característics.

- 7.4 Sigui $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ una referència d'un espai afí euclidià tal que la matriu del producte escalar en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ és

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Demostreu que l'afinitat amb equacions

$$\begin{cases} x^* = -x + z \\ y^* = -y + z \\ z^* = z + 1 \end{cases}$$

és un desplaçament i estudieu-lo.

7.5 Sigui $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ una referència d'un espai afí euclidià. Demostreu que l'afinitat amb equacions

$$\begin{cases} x^* = -x + z \\ y^* = y + z \\ z^* = z + 1 \end{cases}$$

no és cap desplaçament.

7.6 Sigui A un espai afí euclidià de dimensió 2. Considerem la família d'afinitats que en un sistema de referència ortonormal tenen les equacions següents, on $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x^* = cy + a \\ y^* = x + b. \end{cases}$$

- (i) Trobeu per a quins valors dels paràmetres són desplaçaments i estudeu-los.
- (ii) Trobeu els valors dels paràmetres de l'apartat (i) per tal que $\min_{p \in A} d(p, p^*) = \sqrt{2}$.
- (iii) Trobeu el lloc geomètric de les imatges d'un punt qualsevol per tots els desplaçaments de l'apartat (ii).

7.7 (Juny 1995) En un espai afí euclidià de dimensió 3 considerem l'afinitat f que en un sistema de referència ortonormal té les equacions següents:

$$\begin{cases} x^* = ((2 + \sqrt{2})/4)x + by + ((2 - \sqrt{2})/4)z + 1 \\ y^* = ax + (\sqrt{2}/2)y + bz + 2 - \sqrt{2} \\ z^* = ((2 - \sqrt{2})/4)x + ay + ((2 + \sqrt{2})/4)z - 1. \end{cases}$$

- (i) Determineu els valors dels paràmetres $a, b \in \mathbb{R}$ per tal que f sigui un desplaçament.
- (ii) Classifiqueu aquests desplaçaments i determineu els seus elements característics.

7.8 En un sistema de referència $\{P; e_1, e_2\}$ on la base està formada per vectors unitaris que formen un angle de 60° , doneu les equacions del gir de centre $(1, 1)$ i angle 30° .

7.9 A l'espai afí euclidià de dimensió 3, trobeu la matriu ortogonal corresponent a la rotació de 60° respecte a l'eix que en una referència ortonormal s'expressa com $x = 1, y = z$ considerant l'orientació positiva de l'eix amb el vector $(0, 1, 1)$.

7.10 Considerem a l'espai afí euclidià de dimensió 3 la simetria axial f respecte de la recta r que en una referència ortonormal té les equacions

$$r : \frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = z,$$

la simetria central g respecte del punt $P = (0, 1, -1)$ i la simetria especular h respecte del pla perpendicular a r que passa per P . Estudieu la composició $h \circ g \circ f$.

7.11 (Juny 1994) Considerem en un espai afí euclidià de dimensió tres un sistema de referència ortonormal i les rectes que en aquesta referència tenen les equacions $r : x = y = z$ i $s : x = 0, y = 1$. Siguin S_r, S_s les simetries axials respecte a les rectes r i s . Classifiqueu la composició $S_r \circ S_s$ i determineu els seus elements característics.

- 7.12 (Setembre 2000) Considerem els plans que, en una certa referència ortonormal de l'espai afí euclidià de dimensió 3, tenen les equacions següents:

$$\pi : x + y + z = 0, \quad \pi' : x + y = 2.$$

Classifiquen les simetries especulars $S_\pi, S_{\pi'}$ respecte dels plans π i π' ; trobeu els seus elements característics i doneu les equacions de la composició $S_{\pi'} \circ S_\pi$.

- 7.13 (Juny 2000) Sigui E un espai vectorial de dimensió n sobre $\mathbb{R}$, i sigui $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de E . Sigui $\varphi: E \rightarrow E$ l'aplicació lineal definida per $\varphi(e_i) = e_{i+1}$, per a $i = 1, \dots, n-1$, $\varphi(e_n) = e_1$.

- (i) Demostreu que la matriu associada a φ en la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ és ortogonal.
- (ii) Proveu que $\varphi^n = \text{Id}$. Calculeu el polinomi característic de φ .
- (iii) Doneu la forma canònica de φ .
- (iv) Supposeu ara que E és euclidià i $\{e_1, \dots, e_n\}$ és una base ortonormal. Classifiquen els desplaçaments f amb aplicació lineal associada φ .

- 7.14 (Juny 1998) Sigui $ABCD$ un rectangle del pla afí euclidià.

- (i) Trieu una referència i determineu les equacions de les afinitats f tals que $f(A) = B$ i $f(B) = C$.
- (ii) En quins casos hi ha desplaçaments en aquesta família d'afinitats? En cas que n'hi hagi, classifiquen-los i doneu-ne els elements característics.

- 7.15 Donats un punt p i una recta r del pla euclidià (on $p \notin r$), considerem tots els girs d'angle 60° que transformen p en un punt de r . Trobeu el lloc geomètric dels centres de gir.

- 7.16 (Juny 1995) Sigui ABC un triangle del pla afí euclidià de costats $\|\vec{AB}\| = \|\vec{AC}\| = 4$ i $\|\vec{BC}\| = 3$. Sigui f l'únic desplaçament impropri tal que $f(A) = C$ i $f(B) = A$.

- (i) Demostreu que f és una simetria axial seguida d'una translació de vector paral·lel a l'eix de simetria.
- (ii) Trobeu l'eix de la simetria i el vector de la translació.

- 7.17 Estudieu la composició de les quatre simetries respecte dels costats consecutius d'un rectangle qualsevol.

- 7.18 Donat un tetràedre regular $ABCD$ de $\mathbb{R}^3$, demostreu que existeix una única afinitat f tal que $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = D$ i $f(D) = A$. Demostreu que és un desplaçament i classifiquen-lo.

- 7.19 Componen les simetries axials d'eixos tres arestes consecutives i no coplanàries d'un tetràedre regular.

- 7.20 (Setembre 2000) Siguin r i s dues rectes paral·leles del pla afí euclidià. Trobeu el lloc geomètric dels centres dels girs que transformen r en s .

- 7.21 (Juny 2000) Siguin l_1, l_2, l_3 tres rectes del pla afí euclidià. Denotem per s_i la simetria axial d'eix l_i .
- (i) Proveu que, si l_1 i l_2 són paral·leles, $s_2 \circ s_1$ és una translació. Determineu el vector translació.
 - (ii) Proveu que si l_1 i l_2 són concurrents, $s_2 \circ s_1$ és un gir. Determineu el centre i l'angle.
 - (iii) Proveu que si l_1, l_2 i l_3 són paral·leles o concurrents, $s_3 \circ s_2 \circ s_1$ és una simetria axial.
- 7.22 (Gener 2000) Siguin A, B, C, D, E els vèrtexs d'una piràmide recta, de base quadrada $ABCD$ de costat 1, i d'alçada 2. Siguin s_1 i s_2 les simetries axials d'eixos EA i EB respectivament. Estudieu $s_2 \circ s_1$.
- 7.23 (Setembre 1999) En un espai afí euclidià es consideren donats un pla π i una recta r no paral·lela ni perpendicular al pla π . Determineu i classifiqueu els desplaçaments f tals que $f(r) = r$ i $f(\pi) = \pi$.
- 7.24 Estudieu els desplaçaments del pla afí euclidià que deixen invariant un quadrat.
- 7.25 Estudieu els desplaçaments de $\mathbb{A}^3$ que deixen fixos dos plans ortogonals.
- 7.26 (Gener 2000) Donats dos punts diferents de $\mathbb{R}^3$, estudieu el grup de tots els desplaçaments tals que $\{f(A), f(B)\} = \{A, B\}$.
- 7.27 Estudieu el grup de desplaçaments del pla que deixen fix cadascun dels conjunts següents:
- (i) un triangle (que pot ser isòsceles o equilàter);
 - (ii) un rectangle (en particular, un quadrat).
- 7.28 Estudieu el grup de desplaçaments de l'espai que deixen fix cadascun dels conjunts següents:
- (i) un rectangle (que pot ser un quadrat) i un punt no situat al mateix pla;
 - (ii) un pla i dos punts diferents no situats sobre el pla.
- 7.29 (Setembre 1996) Sigui $ABCD$ un quadrat de diagonals AC, BD i sigui f l'afinitat que transforma A en B , B en D i C en A .
- (i) Busqueu la imatge de D .
 - (ii) Busqueu els punts fixos de f .
 - (iii) Esbrineu si l'endomorfisme associat $\tilde{f}$ diagonalitza.
- 7.30 Sigui T un triangle equilàter fixat en el pla $\mathbb{R}^2$. Es considera l'aplicació f que assigna a cada punt P del pla el baricentre de les projeccions ortogonals de P sobre cadascun dels costats de T . Demostreu que f és una afinitat i classifiqueu-la.
- 7.31 (Juny 2003) Sigui $\mathbb{A}^3$ un espai afí euclidià de dimensió 3. Siguin r i s dues rectes de $\mathbb{A}^3$ que es creuen. Demostreu que la composició de les simetries axials respecte de r i s , respectivament, és un moviment helicoidal d'eix la recta perpendicular comú a r i a s , i determineu el vector de la translació corresponent.