

# Topologia i Geometria Global de Superfícies

Curs 2014–2015

## Llista 2: Grup fonamental

En aquesta llista d'exercicis, totes les homotopies de camins són relatives als extrems de l'interval  $[0, 1]$ , encara que no s'especifiqui.

1. (a) Demostreu que, si  $\sigma, \sigma', \omega$  i  $\omega'$  són camins en un espai  $X$  tals que  $\sigma(0) = \sigma'(0)$ ;  $\sigma(1) = \sigma'(1) = \omega(0) = \omega'(0)$ ;  $\omega(1) = \omega'(1)$ ;  $\sigma \simeq \sigma'$  i  $\omega \simeq \omega'$ , llavors es compleix que  $\sigma * \omega \simeq \sigma' * \omega'$ .  
(b) Demostreu que, si  $\sigma, \omega$  i  $\tau$  són camins en un espai  $X$  tals que  $\sigma(1) = \omega(0)$  i  $\omega(1) = \tau(0)$ , llavors  $(\sigma * \omega) * \tau \simeq \sigma * (\omega * \tau)$ .  
(c) Per a cada punt  $p$  d'un espai  $X$ , denotem per  $c_p$  el camí a  $X$  constant en el punt  $p$ . Demostreu que si  $\sigma$  és un camí qualsevol a  $X$  llavors  $c_{\sigma(0)} * \sigma \simeq \sigma$  i  $\sigma * c_{\sigma(1)} \simeq \sigma$ .  
(d) Per a cada camí  $\sigma$  en un espai  $X$ , denotem per  $\bar{\sigma}$  el camí invers, definit com  $\bar{\sigma}(t) = \sigma(1 - t)$  per a tot  $t \in I$ . Demostreu que  $\sigma * \bar{\sigma} \simeq c_{\sigma(0)}$  i  $\bar{\sigma} * \sigma \simeq c_{\sigma(1)}$ .
2. Demostreu que si  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  i  $\beta_2$  són camins en un espai  $X$  amb  $\alpha_1 * \beta_1 \simeq \alpha_2 * \beta_2$  i a més  $\alpha_1 \simeq \alpha_2$  llavors  $\beta_1 \simeq \beta_2$ .
3. Demostreu que un espai  $X$  és simplement connex si i només si per a tot parell de punts  $x, y \in X$  hi ha una única classe d'homotopia de camins de  $x$  a  $y$ .
4. Considerem el grup ortogonal especial  $SO(3)$ , format per les matrius de les rotacions a  $\mathbb{R}^3$ , amb la topologia euclidiana i punt base la matriu identitat.  
(a) Demostreu que  $SO(3)$  és homeomorf a l'espai projectiu real  $\mathbb{R}P^3$ .  
(b) Demostreu que si  $\rho$  denota el llaç a  $SO(3)$  definit per les rotacions al voltant de l'eix  $x = y = 0$ , llavors  $\rho * \rho$  és homòtop al llaç constant en el punt base.
5. Sigui  $X, Y$  espais amb punts base respectius  $x_0, y_0$ .  
(a) Demostreu que  $\pi(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0)$ .  
(b) Demostreu que si  $\sigma$  és un llaç a  $X \times \{y_0\}$  amb  $\sigma(0) = \sigma(1) = (x_0, y_0)$  i  $\omega$  és un llaç a  $\{x_0\} \times Y$  amb  $\omega(0) = \omega(1) = (x_0, y_0)$  llavors  $\sigma * \omega \simeq \omega * \sigma$  a  $X \times Y$ .  
(c) Calculeu el grup fonamental del tor  $S^1 \times \cdots \times S^1$  de dimensió  $n$ .
6. Demostreu que el grup fonamental de la unió puntual  $S^1 \vee S^1$  no és commutatiu.
7. Demostreu que, si  $D^2$  denota el disc unitat tancat de  $\mathbb{R}^2$  i  $f: D^2 \rightarrow D^2$  és un homeomorfisme, llavors  $f(S^1) = S^1$ .
8. Demostreu que tota aplicació contínua  $S^2 \rightarrow S^2$  no exhaustiva té algun punt fix.

9. Sigui  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ . Demostreu que tota aplicació contínua  $X \rightarrow X$  homòtopa a una aplicació constant té algun punt fix.
10. Demostreu que tota matriu  $3 \times 3$  amb coeficients positius té algun valor propi positiu.
11. Un espai  $X$  té la  *propietat del punt fix*  si per a tota aplicació contínua  $f: X \rightarrow X$  existeix algun punt  $p \in X$  tal que  $f(p) = p$ .
- (a) Demostreu que si un espai  $X$  té la propietat del punt fix i  $A$  és un retracte de  $X$ , llavors  $A$  també té la propietat del punt fix. Deduïu-ne que si el producte  $X \times Y$  de dos espais té la propietat del punt fix, llavors  $X$  i  $Y$  també la tenen.
- (b) Demostreu que la propietat del punt fix es conserva per homeomorfismes però no es conserva per equivalències homotòpiques.
- (c) Decidiu quins dels espais següents tenen la propietat del punt fix: l'esfera  $S^n$ ; la bola oberta de dimensió  $n$ ; el tor  $S^1 \times \cdots \times S^1$  de dimensió  $n$ ; el disc tancat  $D^2$ ;  $S^1 \vee S^1$ ;  $D^2 \vee D^2$ .
12. (a) Demostreu que per a tota aplicació contínua  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  existeix algun punt  $x \in S^1$  tal que  $f(x) = f(-x)$  (teorema de Borsuk–Ulam en dimensió 1).
- (b) Demostreu que per a tota aplicació contínua  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  existeix algun punt  $x \in S^2$  tal que  $f(x) = f(-x)$  (teorema de Borsuk–Ulam en dimensió 2).
- (c) Demostreu que no hi ha cap subespai de  $\mathbb{R}$  homeomorf a  $S^1$  ni cap subespai de  $\mathbb{R}^2$  homeomorf a  $S^2$ .
13. Siguin  $\alpha$  i  $\beta$  dos camins tancats al pla complex per als quals existeix algun punt  $p$  tal que  $|\alpha(t) - \beta(t)| < |\beta(t) - p|$  per a tot  $t$ . Demostreu que  $\text{ind}_p(\alpha) = \text{ind}_p(\beta)$ .
14. Calculeu l'índex del camí tancat

$$\gamma(t) = e^{4\pi it} + e^{2\pi it} + 1, \quad 0 \leq t \leq 1$$

al pla complex respecte als punts  $p_1 = 0,5$ ;  $p_2 = 4$ ;  $p_3 = 1 + i$ .

15. Calculeu l'índex respecte a  $(0,0)$  de cadascuna de les  *corbes de Lissajous*

$$f(t) = (\cos 2m\pi t, \sin 2n\pi t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

en funció de  $m$  i  $n$  en els casos on la corba no passi per  $(0,0)$ .

16. (a) Demostreu que, si una aplicació contínua  $g: S^1 \rightarrow S^1$  es pot estendre a una aplicació contínua  $D^2 \rightarrow S^1$ , on  $D^2$  denota el disc tancat, llavors  $g$  té grau 0.
- (b) Siguin  $f$  i  $g$  dues aplicacions contínues  $D^2 \rightarrow D^2$ . Demostreu que si  $g(S^1) \subseteq S^1$  i el grau de la restricció  $g: S^1 \rightarrow S^1$  és diferent de zero, llavors hi ha algun punt  $x_0 \in D^2$  tal que  $f(x_0) = g(x_0)$ .
- (c) Calculeu el grau de l'aplicació  $g: S^1 \rightarrow S^1$  donada per  $g(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ .
- (d) Demostreu que el sistema d'equacions següent té alguna solució a  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{cases} \cos(x + y + y^2) - x^2 + y^2 = 0 \\ \sin(x + y + y^2) - 2xy = 0. \end{cases}$$

17. (a) Demostreu que el sistema d'equacions següent té alguna solució a  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{cases} \cos(1 + \sin(x^2 + y^7)) = x \\ \sin(1 + \cos(x^7 + y^2)) = y. \end{cases}$$

- (b) Comproveu que  $x = -0,31267$ ,  $y = 0,99956$  és una solució.

18. (a) Demostreu que el camí tancat

$$\gamma(t) = (5 \cos 4\pi t + \sin^4 2\pi t - 1, 5 \sin 4\pi t + \cos^7 2\pi t - 2)$$

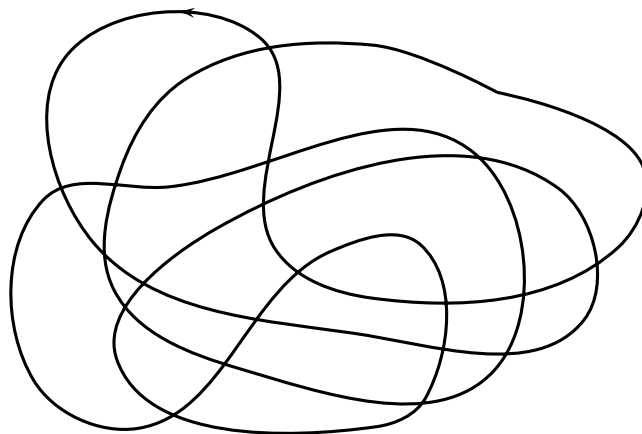
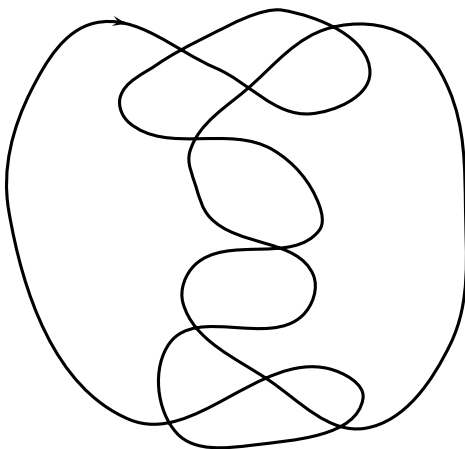
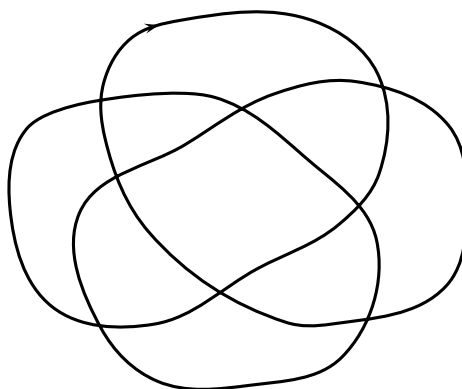
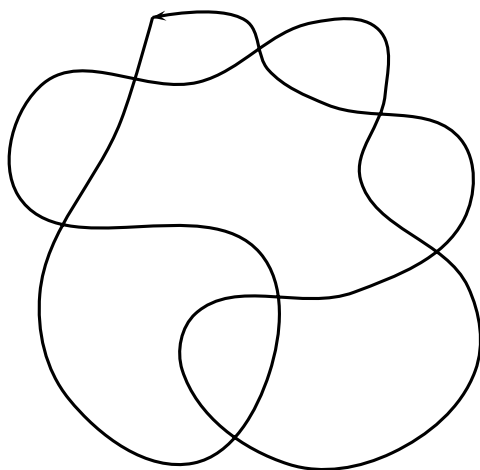
no passa per  $(0, 0)$  i calculeu l'índex de  $\gamma$  respecte a  $(0, 0)$ .

- (b) Demostreu que el sistema d'equacions següent té alguna solució a  $\mathbb{R}^2$  de mòdul menor que 0,70464:

$$\begin{cases} 5x^2 - 5y^2 + y^4 = 1 \\ x^7 + 10xy = 2. \end{cases}$$

- (c) Comproveu que  $x = 0,56548$ ,  $y = 0,35040$  és una solució.

19. Per a cada regió delimitada per cadascun dels camins següents, determineu el nombre de voltes del camí respecte a un punt arbitrari situat a l'interior de la regió.



20. Sigui  $X$  un espai i sigui  $f: S^1 \rightarrow X$  una aplicació contínua. Denotem per  $X \cup_f D^2$  l'espai que s'obté adjuntant una cel·la de dimensió 2 a  $X$  mitjançant  $f$ . Demostreu que, per a tot punt  $p \in X$ , el morfisme induït

$$\pi(X, p) \longrightarrow \pi(X \cup_f D^2, p)$$

és exhaustiu. Trobeu el nucli d'aquest morfisme.

21. Demostreu que l'espai  $S^2 \cup \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  és simplement connex.
22. Demostreu que  $S^2 \cup \{(x, 0, 0) \mid -1 \leq x \leq 1\}$  no és homotòpicament equivalent a  $S^2$ .
23. Trobeu el grup fonamental dels espais següents amb un punt base adient:

- (a)  $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$ ;
- (b)  $\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$ ;
- (c)  $\mathbb{R}^3 \setminus (A \cup B)$  on  $A$  i  $B$  són dues rectes que no es tallen;
- (d)  $\mathbb{R}^3 \setminus (\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\} \cup \{(x, y, z) \mid (x - 1)^2 + z^2 = 1, y = 0\})$ .

24. Un *grup topològic* és un grup  $G$  amb una topologia tal que l'aplicació multiplicació  $\mu: G \times G \rightarrow G$ ,  $\mu(x, y) = xy$  és contínua si es considera a  $G \times G$  la topologia producte, i l'aplicació  $\iota: G \rightarrow G$  de pas a l'invers,  $\iota(x) = x^{-1}$ , també és contínua.

- (a) Demostreu que els espais següents admeten estructura de grup topològic:  $\mathbb{R}^n$  amb la suma, per a tot  $n$ ;  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  amb el producte de nombres complexos;  $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$  amb el producte de quaternions;  $S^1$ ;  $S^3$ ;  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ ,  $\text{O}(n)$  i  $\text{SO}(n)$  amb el producte de matrius, per a tot  $n$ .
- (b) Demostreu que si  $G$  és un grup topològic llavors  $G \times G$  també ho és.
- (c) Demostreu que si  $G$  és un grup topològic llavors  $\pi(G, p)$  és commutatiu per a tot  $p \in G$ .
- (d) Demostreu que l'ampolla de Klein no admet estructura de grup topològic.
- (e) Demostreu que  $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$  admet estructura de grup topològic però en canvi  $\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\}$  no l'admet si  $p \neq q$ .