

# Topologia i Geometria Global de Superfícies

Curs 2014–2015

## Llista 4: Varietats diferenciables

1. A l'esfera  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  considerem els punts  $N = (0, \dots, 0, 1)$  i  $S = (0, \dots, 0, -1)$  i els oberts  $U_N = S^n \setminus \{N\}$ ,  $U_S = S^n \setminus \{S\}$ . Demostreu que les cartes locals  $(U_N, \varphi_N)$ ,  $(U_S, \varphi_S)$  donades per les coordenades estereogràfiques

$$\varphi_N: U_N \rightarrow \mathbb{R}^n; \quad \varphi_N(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)$$

$$\varphi_S: U_S \rightarrow \mathbb{R}^n; \quad \varphi_S(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 + x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)$$

formen un atlas diferenciable de  $S^n$ . En el cas  $n = 2$ , demostreu que la imatge per  $\varphi_N$  i  $\varphi_S$  d'un cercle màxim és una circumferència o una recta i, per a cada punt  $p \in S^n$ , determineu la imatge de  $-p$  a partir de la imatge de  $p$ .

2. A l'espai projectiu  $\mathbb{R}P^n$  es considera la col·lecció  $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i), \dots, (U_{n+1}, \phi_{n+1})\}$  on  $U_i = \{[x_1, \dots, x_{n+1}] \in \mathbb{R}P^n \mid x_i \neq 0\}$  i l'aplicació  $\phi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  es defineix com

$$\phi_i([x_1, \dots, x_{n+1}]) = \frac{1}{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}).$$

Demostreu que  $\mathcal{U}$  és un atlas diferenciable de  $\mathbb{R}P^n$  i que  $\phi_i$  envia rectes a rectes.

3. Demostreu que, si pensem  $\mathbb{R}P^n$  com el quocient de  $S^n$  per la relació que identifica punts antipodals, llavors l'aplicació quocient  $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  és diferenciable i és un difeomorfisme local.
4. Demostreu que, si  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  és un atlas diferenciable en una varietat  $M$  de dimensió  $m$  i  $\{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$  és un atlas diferenciable en una varietat  $N$  de dimensió  $n$ , llavors  $\{(U_i \times V_j, \varphi_i \times \psi_j)\}_{i \in I, j \in J}$  és un atlas diferenciable a  $M \times N$ .
5. Doneu un atlas diferenciable per al tor  $S^1 \times \dots \times S^1$  de dimensió  $n$ .
6. Donades dues constants  $a, b > 0$ , sigui  $f: S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'aplicació donada per

$$f(e^{i\alpha}, e^{i\beta}) = ((a + b \cos \alpha) \cos \beta, (a + b \cos \alpha) \sin \beta, b \sin \alpha).$$

(a) Demostreu que si  $a \leq b$  llavors  $f$  no és una immersió.

(b) Demostreu que si  $a > b$  llavors  $f$  és un *embedding*.

7. Siguin  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'aplicació  $F(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$ . Demostreu que  $F$  induïx una aplicació diferenciable  $f: \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  i que  $f$  és un *embedding*.
8. Siguin  $M_1$  i  $M_2$  dues superfícies diferenciables. Siguin  $D_1$  un disc tancat en una carta local de  $M_1$  i  $D_2$  un disc tancat en una carta local de  $M_2$ . Escollim discs  $D'_1 \subset D_1$  i  $D'_2 \subset D_2$  de radis estrictament menors i definim  $M_1 \# M_2$  com l'espai obtingut suprimint els interiors de  $D'_1$  i  $D'_2$  i identificant  $D_1 \setminus \text{Int}(D'_1)$  amb  $D_2 \setminus \text{Int}(D'_2)$  mitjançant un difeomorfisme que envii la vora de  $D_1$  a la vora de  $D'_2$  i la vora de  $D_2$  a la vora de  $D'_1$ . Demostreu que  $M_1 \# M_2$  té un atlas diferenciable format per les cartes locals de  $M_1$  i  $M_2$ .